Das Problem mit der Schulmathematik

von Harald Ziebarth

Die einzelnen Themengebiete der meisten Schulfächer sind mehr oder minder inhaltlich miteinander verzahnt. Einerseits bedeutet dies, dass der Unterricht von einfachen Dingen ausgehend, die schwierigeren Bereiche erobern kann. Andererseits sind dadurch viele Inhalte nicht nur bis zur nächsten Klassenarbeit oder Klausur, sondern auch darüber hinaus, als wichtig anzusehen. Sachverhalte, die man nicht oder nur unzureichend verstanden hat, sind naturgemäß eine wackelige Basis für darauf aufbauende Themen.
Bedingt durch den hierarchischen Aufbau der Schulmathematik haben deshalb viele Schüler auf lange Zeit vorprogrammierte Probleme im Fach Mathematik.

Verhältnis

Ein typisches Beispiel für ein Thema, das sich wie ein roter Faden durch die schulische Laufbahn zieht, ist der Begriff des mathematischen „Verhältnisses". Dabei handelt es sich eigentlich um eine simple Angelegenheit, da man in der Mathematik ein Verhältnis durch Teilen zweier Größen bzw. Zahlen erhält.
Das Teilen selbst und die Berechnung des Ergebnisses werden nach einigem Training, spätestens aber mit dem Einsatz eines Taschenrechners, meist gut bewältigt. Aber die Vorstellung und Interpretation, sowie die sachgerechte Anwendung des Verhältnisbegriffes bereiten selbst nach Jahren den Schülern noch Probleme.

Dass man das Teilen zweier Zahlen in unterschiedlicher Form schreiben kann, erleichtert die Sache oftmals nicht. Deshalb verwundert es auch nicht, dass Schüler am Ende ihrer schulischen Laufbahn immer noch nicht verinnerlicht haben, dass ein Bruch nur eine andere Schreibweise für eine Teilungsaufgabe darstellt:

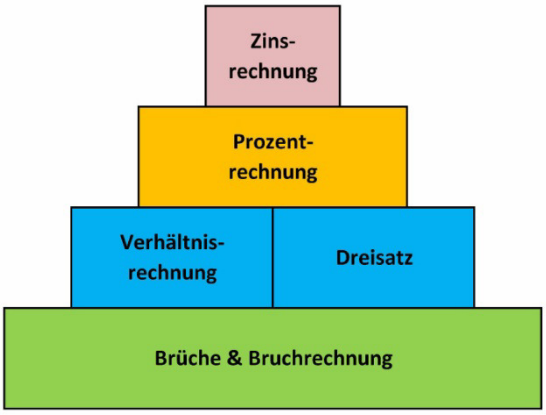
$$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

- Quotient: 4 : 8 = 0,5
- Bruch: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Das Rechnen mit Prozenten ist nur ein Spezialfall der Bruchrechnung mit dem Nenner 100:

$$3\ \% = 3 \text{ von Hundert} = \frac{3}{100}$$

Berücksichtig man nun, dass die Zinsrechnung wiederum eine spezielle Form der Prozentrechnung darstellt, dehnt sich das Problem mit dem Verhältnis direkt über mehrere Themenfelder aus und garantiert bei mangelndem Verständnis die schlechte Mathe-Note gleich in mehreren schriftlichen Prüfungen.



Je nach Bundesland, Schulform und innerschulischem Lehrplan werden die einzelnen Themen in unterschiedlichen Jahrgangsstufen besprochen[1].
Der Verhältnisbegriff wird in der Grundschule eingeführt und in den Jahrgangsstufen 5 bzw. 6 durch die Bruchrechnung vertieft. Wegen seiner Verbreitung in der Mathematik und anderen Fächern wie z.B. in der Physik und Wirtschaft taucht das Prinzip in den Folgejahren immer wieder auf. Da das Verhältnisprinzip insbesondere im beruflichen Alltag eine wichtige Rolle spielt, kommt dieser Aspekt oftmals direkt oder indirekt in Einstellungsgesprächen und Aufnahmeprüfungen vor.
Beim Betrachten der nachfolgenden Auflistung wichtiger Verhältnisse wird einem sicherlich der eine oder andere Begriff aus dem Alltagsleben bekannt vorkommen.

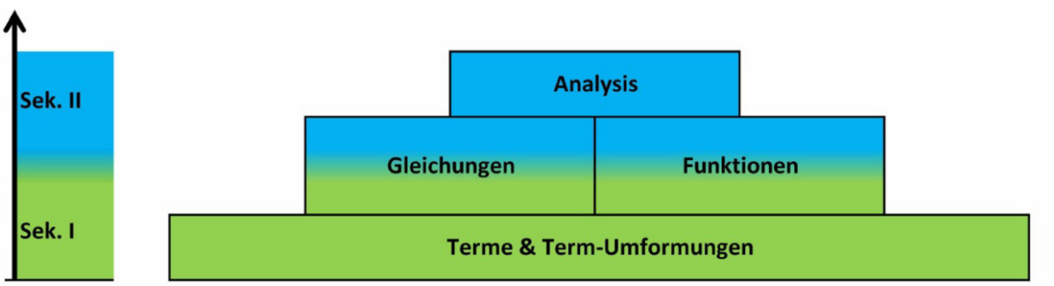
[1] Ein typisches Beispiel für das föderale Chaos ist die Vektorrechnung: Ein Realschüler in Bayern lernt bereits in der Jahrgangsstufe 9 die Vektoren kennen; in Nordrhein-Westfalen erfährt man im allgemeinen erst ein Jahr vor dem Abitur etwas von Skalarprodukt & Co.

Beispiele für wichtige Verhältnisse

Prozent	Anteile von Hundert	**Teilungsverhältnis** Geometrie	z.B. Goldener Schnitt und Strahlensätze
Relative **Häufigkeit**	Verhältnis einer bestimmten Anzahl von Ereignissen zur Gesamtzahl; Vorstufe der **Wahrscheinlichkeit**	Trigonometrie	Verhältnis von Dreiecksseiten
		Steigung	Verhältnis von Höhendifferenz zur Horizontaldifferenz
Proportionale Zuordnungen	„Je mehr …, desto mehr …“ bzw. „je weniger …, desto weniger …“	**Geschwindigkeit**	Verhältnis von zurückgelegtem Weg zur dafür benötigten Zeit
Wirtschaftliche **Kennzahlen**	z.B. Quote, Rentabilität	**Dichte**	Verhältnis von Masse und Volumen

Terme, Gleichungen und Funktionen

Im Lehrplan der Mathematik wird zusätzlich zum klassischen Rechnen mit Zahlen auch die Verwendung von Buchstaben und Symbolen zur Beschreibung und Lösung von Problemen berücksichtigt.



Aus Zahlen und Buchstaben (**Variablen**) werden mathematische Ausdrücke, sogenannte **Terme**, aufgestellt, um Gegenstände und Probleme aus Beruf und Alltag zu erfassen (s.a. Infokasten „Terme“). Ansätze dazu finden sich bereits in der dritten oder vierten Grundschulklasse. Meist wird dies ab der 6. / 7. Jahrgangsstufe dann systematisch betrieben. Nach dem Erstellen der Terme müssen sie von den Schülern umgeformt und vereinfacht werden.

Sind zwei Terme gleichwertig, so kann man sie durch ein Gleichheitszeichen („=“) verknüpfen, so dass eine **Gleichung** notiert werden kann:

Gleichung: $\text{Term}_1 = \text{Term}_2$

Diese Gleichung ist dann zu lösen, also so zu verändern, dass die Zahlenwerte, die die Gleichung erfüllen, ersichtlich sind.

Beispielsweise kann aus den beiden Ausdrücken $3x + 2$ und $4x - 1$ die Gleichung

$$3 \cdot x + 2 = 4 \cdot x - 1$$

erstellt werden. Diese Gleichung ist erfüllt, sobald wir für die Variable x den Wert 3 einsetzen!

Wird der Wert einer Variablen durch eine andere Variable in der Gleichung beeinflusst, sind die mathematischen Inhalte der Buchstaben also abhängig voneinander, so beschreibt die Gleichung eine sogenannte „**Funktion**“.

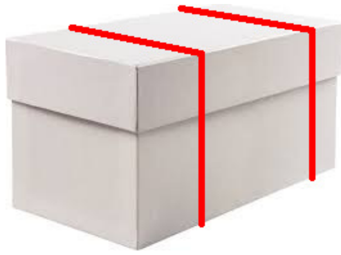
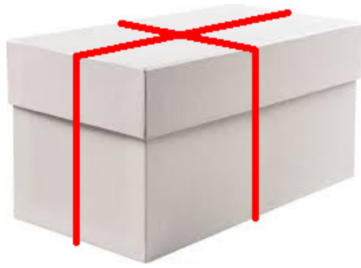
In der Gleichung $y = 3x + 2$ verändert sich der Wert der Variablen y, sobald wir für x unterschiedliche Zahlen einsetzen. Diese Gleichung beschreibt somit einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Variablen x und y.

Die Hintereinanderschaltung der Begriffe Term – Gleichung – Funktion lässt schon erahnen, dass sich in der Mathematik-Laufbahn eines Schülers eine weitere Kausalkette mit Konfliktpotenzial andeutet. Verständnislücken in der Mittelstufe sollten deshalb möglichst schnell und nachhaltig geschlossen werden, um weitere Defizite zu vermeiden.

Infokasten „Terme“

Terme sind mathematische Ausdrücke, die neben Zahlen auch Buchstaben, sogenannte Variablen, enthalten. Belegt man diese Variablen mit einem sinnvollen Inhalt, so können durch Terme Probleme aus dem Alltag allgemein erfasst und für spezielle Situationen eine konkrete Lösung angegeben werden.

Das Prinzip soll das folgende Beispiel veranschaulichen: Ein Betrieb verpackt seine Waren in Standardpakete mit den Abmessungen Länge l = 21,3 cm, Breite b = 15,3 cm und Höhe h = 10,9 cm. Je nach Wert des Inhaltes werden die Pakete auf drei unterschiedliche Arten verschnürt.

Um den Verbrauch an Verpackungsschnur besser planen zu können, wird der Bedarf für jeden Paket-Typ durch einen Term beschrieben.

Typ 1: $2 \cdot (l + h)$ Typ 2: $4 \cdot (b + h)$ Typ 3: $2 \cdot (l + h) + 2 \cdot (b + h)$

Für einen bestimmten Versandauftrag wird die Gesamtlänge der Schnur in Zentimetern durch den Buchstaben S, die Anzahl der zu versendenden Paket-Typen durch t_1, t_2 und t_3 angegeben.

1. Term aufstellen $S = t_1 \cdot 2 \cdot (l + h) + t_2 \cdot 4 \cdot (b + h) + t_3 \cdot [2 \cdot (l + h) + 2 \cdot (b + h)]$
2. Term „vereinfachen“ $S = 2 \cdot [\,(l + h) \cdot t_1 + 2 \cdot (b + h) \cdot t_2 + (b + 2h + l) \cdot t_3\,]$
3. Werte b,l,h einsetzen $S = 64{,}4\, t_1 + 104{,}8\, t_2 + 116{,}8\, t_3$

Setzt man für t_1, t_2 und t_3 in die letzte „Formel“ die Anzahl der jeweils verschnürten Pakete ein, so kann man auch bei wechselnder Auftragslage schnell die benötigte Länge an Verpackungsschnur angeben.

	A	B	
1	Anzahl Typ 1	300	
2	Anzahl Typ 2	400	
3	Anzahl Typ 3	600	
4			
5	Schnurlänge	=64,4*B1+104,8*B2+1	cm

	A	B	
1	Anzahl Typ 1	189	
2	Anzahl Typ 2	458	
3	Anzahl Typ 3	341	
4			
5	Schnurlänge	99.998,80	cm

	A	B	
1	Anzahl Typ 1	300	
2	Anzahl Typ 2	400	
3	Anzahl Typ 3	600	
4			
5	Schnurlänge	131.320,00	cm

Durch Einfügen der Formel in eine Tabellenkalkulation lassen sich rasch verschiedene Fälle berechnen!

Beispielsweise benötigt man beim Versand von 189 Paketen von Typ 1 bzw. 458 vom Typ 2 und 341 vom Typ 3 insgesamt 99.998,8 cm, also fast einen Kilometer, Schnur.

Der Aufwand für Erstellung, Umformung und Vereinfachung eines Terms mag auf den ersten Blick recht groß sein. Sind die einzelnen Berechnungen aber öfters notwendig, so lassen sich durch den Einsatz einer fertigen Formel viel Zeit und Rechenaufwand einsparen und vor allem Fehler vermeiden!

Defizite gezielt aufarbeiten

In rund 35 Jahren Erfahrungen im Bereich des privaten Unterrichtes wurde nur sehr selten ein Abiturient beobachtet, der wirkliche Oberstufenprobleme in Mathematik hatte. Bei genauem Hinsehen erkannte man sehr schnell, dass es sich meist um gut verpackte Mittelstufenprobleme handelte, die in der Oberstufe dann ihr gesamtes negatives Potenzial freisetzen konnten. Die Prinzipien der Analysis, einem zentralen Oberstufen-Thema, sind den Schülern meist rasch klar geworden – sie konnten ihre Erkenntnisse aber rechnerisch nicht umsetzen, weil ihnen dazu das mathematische Handwerkszeug fehlte.

Eine gute Gelegenheit, die Mathematik-Probleme aus der Mittelstufe nachhaltig abzuschütteln, ergibt sich (spätestens) in den Schulferien vor Eintritt in die Sekundarstufe II. Hier sollte man alle oberstufenrelevanten Themen aufarbeiten und die Rechentechniken festigen. Aus den Erfahrungen mit solchen Brückenkursen ist der nebenstehende Übungsplan[2] zur gezielten Wiederholung entstanden.

Übungsplan zur Vorbereitung auf die Sekundarstufe II

Bruchrechnung	Grundlagen: 1.2.2 K; 1.2.3 K; 1.2.3.8 I; 1.2.4.5 – 1.2.4.7 G.
Taschenrechner	Speichern; Berechnen von Termen: 1.3.1 K.
Klammerrechnung	Ausmultiplizieren; Ausklammern; Binome; Quadratische Ergänzung: 2.3.2 I.
Bruchterme	2.3.3 G.
Potenzrechnung	Potenzen, Potenzgesetze; PASCALsches Dreieck; Polynomdivision: 2.4 I.
Wurzelrechnung	Wurzeln, Wurzelgesetze; Nenner rational machen; Teilradizieren: 2.5 G.
Gleichungen	Prinzip: 3.1.1 K, 3.1.2 I; lineare Gl.: 3.1.3 I; Ungleichungen: 3.1.4 G; Betragsgl.: 2.3.1.2, 3.1.5 K; Quadratische Gl., pq-Formel, Diskriminante, Vieta: 3.5.1 – 3.5.4 I; Biquadratische Gl.: 3.5.8 I; Höhere Gl.: 3.6 I.
LGS	Nur 2er- und einfache 3er-Gleichungssysteme: 3.4 I.
Prozentrechnung	3.3.1 – 3.3.5 K.
Funktionen	Allgemeines: 4.1 – 4.3 K; Lineare Funktionen: 4.4 I; Quadratische Funktionen: 4.5 I.
Geometrie	Fläche und Umfang Dreieck: 5.4, 5.11.2 K; Viereck: 5.5, 5.11.1 K; Kreis: 5.11.5 K.
	Strahlensätze: 5.8.3 K; PYTHAGORAS: 5.9 I.
	Goniometrie, speziell Tangens: 6.1, 6.2, 6.3.1 G.

Schwerpunkte zum Aufarbeiten von Lerndefiziten aus „Mathematik leicht gemacht[2]“: [K]: Kurz [G]: Gründlich [I]: Intensiv wiederholen

Lebenslanges Lernen

Bekommt man die Defizite nicht in den Griff, ist die Herausforderung oftmals auch nach dem Abitur noch nicht beendet. Aufgrund unzureichender mathematischer Kenntnisse bei den Studienanfängern sehen sich die Hochschulen und Universitäten seit Jahren gezwungen, ihren Neuankömmlingen vor Studienbeginn erst einmal die wichtigsten Grundlagen und Techniken der Schulmathematik in Form von Einführungs- und Vorkursen zu vermitteln. Die erschreckenden Ergebnisse in den ersten Mathematik-Klausuren mit teilweise weit über 50 Prozent Durchfallquote (schon wieder ein Verhältnis!) lassen aber begründeten Zweifel aufkommen, ob die Kurse in der angebotenen Form ihre Funktion erfüllen.

Fazit

Entweder man hat den Lernstoff auf Anhieb verstanden oder man muss die Theorie nacharbeiten und die Techniken mit Ausdauer üben. Hilfreich ist es, wenn man einen kompetenten Ansprechpartner hat, der einen beim Lernen begleitet und zum Üben anleitet – aber um das Üben wird man nicht herumkommen!

Harald Ziebarth

Training Manager Online-Nachhilfe, Studienkreis

Web-Adresse: www.online-nachhilfe.de
E-Mail-Kontakt: hziebarth@studienkreis.de

[2] Kreul / Ziebarth „Mathematik leicht gemacht“ ISBN: 978-3-8085-5608-5, Europa Lehrmittel / Harri Deutsch-Verlag , 7. Auflage 2009, 846 Seiten